محاضرة ٢٤

Ex: show that

1) $2J'_n = J_{n-1} - J_{n+1}$

2) $\frac{2n}{x} J_n = J_{n+1} + J_{n-1}$

solution

Notes

a) $\frac{d}{dx}\left[x^n J_n\right] = x^n J_{n-1}$.

b) $\frac{d}{dx}\left(x^{-n} J_n\right) = -x^{-n} J_{n+1}$

a) ~~$x^n J_n$~~ for a

$x^n J'_n + n x^{n-1} J_n = x^n J_{n-1}$

بالقسمة على x^{n-1}

$\Rightarrow x J'_n + n J_n = x J_{n-1} \longrightarrow C$

for b

بالقسمة على x^{-n-1}

$$x^{-n} J_n' - n x^{-n-1} J_n = - x^{-n} J_{n+1}$$

$$x J_n' - n J_n = -x J_{n+1} \longrightarrow d$$

بطرح d / c :

$$2n J_n = + x J_{n+1} + x J_{n-1}$$

$$\boxed{\frac{2n}{x} J_n = J_{n+1} + J_{n-1}} \quad \# \text{ for } \boxed{2}$$

بجمع c , d

$$2x J_n' = - x J_{n+1} + x J_{n-1}$$

على (x)

$$\boxed{2 J_n' = J_{n-1} - J_{n+1}} \quad \# \text{ for } (1)$$

أفكار التصغير والتكبير لدالة Bessel :-

— إذا كان المطلوب تصغير الرقم أسفل J نستخدم

$$\boxed{J_{n+1} = \frac{2n}{x} J_n - J_{n-1}}$$

← إذا كان المطلوب تكبير الرقم. أسفل J نستخدم

$$\boxed{J_{n-1} = \frac{2n}{x} J_n - J_{n+1}}$$

Ex: Express $J_{3/2}$, $J_{\frac{-3}{2}}$ in terms of

$\sin x$, $\cos x$.

Sol

$$J_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\sin x \quad , \quad J_{\frac{-1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\cos x$$

$J_{\frac{3}{2}}$??

$$J_{n+1} = \frac{2n}{x} J_n - J_{n-1} \qquad \longrightarrow n = \frac{1}{2}$$

$$J_{\frac{3}{2}} = \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)}{x} J_{\frac{1}{2}} - J_{\frac{-1}{2}}$$

$$= \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\sin x - \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\cos x$$

$\longrightarrow J_{\frac{-3}{2}}$?? $\Longrightarrow J_{n-1} = \frac{2n}{x} J_n - J_{n+1}$

$$J_{\frac{-3}{2}} = \frac{-1}{x} J_{\frac{-1}{2}} - J_{\frac{1}{2}}$$

$$J_{\frac{-3}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\frac{-1}{x}\cos x - \sin x\right]$$

Home work

① find $J_{\frac{-5}{2}}$, $J_{\frac{5}{2}}$ in terms of $\sin x$, $\cos x$.

② find $J_{\frac{-7}{2}}$, $J_{\frac{7}{2}}$ " " " " " .

أفكار التكامل

$$* \ \frac{d}{dx}\left(x^{n} J_{n}\right) = x^{n} J_{n-1} \longrightarrow (1)$$

$$* \ \frac{d}{dx}\left(x^{-n} J_{n}\right) = -x^{-n} J_{n+1} \longrightarrow (2)$$

ـــ عندما يوجد داخل التكامل " x مضروبة في J_n " إذا كان

أس x موجب و سالبه ما تحت J

$$\int x^{m} J_{n}$$

$$\int x^{m-n-1}\left(x^{n+1} J_{n}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{n+1} J_{n+1}\right)$$

تكامل بالتجزئ

← اذا كان أس x سابق ما تحت J بأكثر من رقم فأخذ من أس "x" ما يضبط قانون رقم (1) بحيث يكون ما فوق x سابق ما تحت J بـ 1 ونكامل بالتجزئ.

Ex: Evaluate

1) $\int x^4 J_1\, dx$

2) $\int_0^1 x^3 J_0\, dx = 2J_0(1) - 3J_1(1)$

3) $\int J_5\, dx$

Sol

1) $\int x^4 J_1\, dx = \int x^2 * x^2 J_1\, dx = I$

$u = x^2$ $\qquad dv = x^2 J_1\, dx = \frac{d}{dx}(x^2 J_2)\, dx$

$du = 2x\, dx \qquad v = x^2 J_2$

$I = x^4 J_2 - 2\int x^3 J_2\, dx$

$x^3 J_2 \rightarrow \frac{d}{dx}(x^3 J_3)$

$I = x^4 J_2 - 2x^3 J_3 + c$

2) $I = \int_0^1 x^3 J_0 \, dx = \int_0^1 x^2 \, x J_0 \, dx$

$dv = x J_0 \, dx = \frac{d}{dx}(x J_1) \, dx$

$u = x^2 \qquad v = x J_1$

$du = 2x \, dx$

$I = x^3 J_1 \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 x^2 J_1 \, dx$

$I = J_1(1) - 2 \left(x^2 J_2(x) \right) \Big|_0^1$

$= J_1(1) - 2 J_2(1)$ نجعل J_2 بدلالة J_1 ، J_2

$J_{n+1} = \frac{2n}{x} J_n - J_{n-1}$

$\underline{n=1} \longrightarrow J_2(x) = \frac{2}{x} J_1(x) - J_0(x)$

بالتعويض

$J_2(1) = 2 J_1(1) - J_0(1)$

$I = J_1(1) - 4 J_1(1) + 2 J_0(1)$

$I = 2 J_0(1) - 3 J_1(1)$ #

(3) $I = \int J_5 \, dx$

← فيه طريقتان نوضح $\int x^{-6} x^{6} J_5$ ← لكنها هتبقى طويلة.

أو $\int x^{-4} x^{4} J_5$ ← دى أبسط قليلاً ⇐ حلها فى البيت.

Ex: Prove that

(1) $\cos(x \sin x) = J_0 + 2J_2 \cos(2\theta) + 2J_4 \cos(4\theta) \cdots$

(2) $\sin(x \sin\theta) = 2J_1(x) \sin\theta + 2 J_3(x) \sin(3\theta) \cdots$

(3) $J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) = 1$

(4) $2\sum 2(n+1) J_{2n+1}(x) = x$

* use generating function

Sol

$$e^{\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^n$$

س/ متى تُظهر (exp.) ال sin، cos ⇐ اذا

$$t = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin\theta$$

$$\frac{1}{t} = e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$t - \frac{1}{t} = 2i\sin\theta$$

$$\text{L.H.S} = e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = e^{\frac{x}{2}(2i\sin\theta)} = e^{ix\sin\theta}$$

$$= \cos(x\sin\theta) + i\sin(x\sin\theta) \rightarrow (1)$$

$$\text{R.H.S} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x)\, e^{in\theta}$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x)\cos(n\theta) + i\sum_{-\infty}^{\infty} J_n \sin(n\theta) \rightarrow (2)$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x)\cos(n\theta) = \ldots J_{-2}\cos(-2\theta) + J_{-1}\cos(-\theta)$$

$$+ J_0(x) + J_1(x)\cos(\theta) + J_2\cos(2\theta) \ldots$$

$$\Rightarrow J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \Rightarrow \begin{matrix} J_{-1} = -J_1 \\ J_{-2} = J_2 \end{matrix}$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x)\cos(n\theta) = J_0 + 2J_2\cos(2\theta) +$$

$$2J_4\cos(4\theta) + \cdots$$

$$= J_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}\cos(2n\theta) \longrightarrow 3$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} J_n \sin(n\theta) = \cdots\cdots + J_{-2}\sin(-2\theta) + J_{-1}\sin(-\theta)$$

$$+ J_0(0) + J_1\sin(\theta) + J_2\sin(2\theta)\cdots$$

(sin) تقلب الإشارة ومع إشارة سالب مقلوب J
تجعل الفردى يتبق.

$$J_{-2}\sin(-2\theta) = (-1)^2 J_2 * -\sin 2\theta$$

$$= -J_2\sin 2\theta$$

$$J_{-1}\sin(-\theta) = -1 * J_1 * -\sin(\theta) = J_1\sin\theta$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} J_n\sin(n\theta) = 2J_1\sin(\theta) + 2J_3\sin(3\theta)\cdots$$

$$= 2\sum J_{2n+1}\sin(2n+1)\theta \longrightarrow 4$$

بالتعويض من ٣، ٤ في ٢

$$\boxed{R.H.S = J_0 + 2\sum J_{2n}\cos(2n\theta) + i\,2\sum J_{2n+1}\sin(2n+1)\theta} \longrightarrow (5)$$

← نساوي الحقيقي بالحقيقي و التخيلي بالتخيلي
من ١ ، 5

$$\therefore \cos(x\sin\theta) = J_0 + 2\sum J_{2n}\cos(2n\theta) \longrightarrow (6)$$

$$\therefore \sin(x\sin\theta) = 2\sum J_{2n+1}\sin(2n+1)\theta \longrightarrow (7)$$

Let $\theta = 0$ in 6

$$\therefore 1 = J_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) \quad \#$$

← إذا كان المطلوب معامل الزاوية مضروب نفاضل حتى يخرج خارج النسبة ، وإذا كان المطلوب معامل الزاوية مقسوم نكامل حتى يخرج تحت النسبة x ثم نفكر نضع قيمة لـ θ في المسألة.

ـــ تفاوضل رقم (7)

$$\cos(x\sin\theta) * x\cos\theta = 2\sum J_{2n+1}(2n+1)\cos(2n+1)\theta$$

at $\theta=0$

$$x(1) = 2\sum (2n+1)\, J_{2n+1}$$

Ex use generating fn

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum J_n(x)\, t^n$$

to show that

① $J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta - n\theta)\, d\theta$

② $\int_0^{\infty} e^{-ax} J_0(bx)\, dx = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ *مهم على التكامل ده

(Lipshit integral)

الحل

$$t = e^{i\theta}\ ;\ \frac{1}{t} = e^{-i\theta}\ ;\ (t-\frac{1}{t}) = 2i\sin\theta$$

$$e^{ix\sin\theta} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n\, e^{in\theta} \longrightarrow (1)$$

ـــ بضرب (1) في $e^{-im\theta}$ والتكامل من $-\pi$ لـ π

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x\sin\theta - m\theta)}\, d\theta = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\theta}\, d\theta$$

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\theta}\, d\theta = \frac{e^{i(n+m)\theta}}{i(n-m)} \Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{i(n-m)} \left[e^{i(n-m)\pi} - e^{-i(n-m)\pi} \right] \; ; \; m \neq n$$

$$= \frac{1}{i(n-m)} \Big[\cos(n-m)\pi + i\sin(n-m)\pi$$

$$- \cos(n-m)\pi + \sin(n-m)\pi \Big]$$

$$\sin(\text{عدد صحيح})\pi = 0 \quad , \cos(\text{عدد صحيح})\pi = (-1)^{\text{عدد صحيح}}$$

$$\therefore I = 0 \qquad ; \quad m \neq n$$

$\underline{at\ n=m}$

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} e^{0}\, d\theta = \theta \Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi$$

$$I = \begin{cases} 2\pi & m=n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

← لأن n يعد من $-\infty$ لـ $+\infty$ ، m عدد صحيح موجب
تمر n على جميع الأرقام ومن ضمنها m ناتج التكامل
عند جميع الأرقام يساوى صفر ماعدا عند "$m=n$"
أى أنه لا يوجد متسلسلة والطرف الأيمن يساوى حد واحد.

$\underline{m=n}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x\sin\theta - n\theta)}\, d\theta = 2\pi J_n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x\sin\theta - n\theta)\, d\theta + i\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x\sin\theta - n\theta)\, d\theta$$

$$= 2n J_n$$

تمارى الحقيق

$$J_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x \sin\theta - n\theta)\, d\theta$$

دالة زوجية

$$J_n = \frac{2}{2\pi} \int_{0}^{\pi} \cos(x \sin\theta - n\theta)\, d\theta$$

For (2)

$$\int_0^\infty e^{-ax} J_0(bx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-ax} \left(\int_0^\pi \cos(bx \sin\theta)\, d\theta \right) dx$$

$$I = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\int_0^\infty e^{-ax} \cos(bx \sin\theta)\, dx \right) d\theta$$

Remark $\int_0^\pi$ even harmonic $= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$L\left[\cos(\omega x)\right] = \int_0^\infty e^{-st} \cos(\omega t) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$\omega = b \sin\theta \qquad , \; s = a$

$$I = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a}{a^2 + b^2 \sin^2\theta}\, d\theta$$

بالقسمة على $\cos^2\theta$ بسطاً ومقاماً

$$I = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2\theta}}{a^2\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right) + b^2 \tan^2\theta}$$

$$= \frac{2a}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2\theta}{a^2 \sec^2\theta + b^2 \tan^2\theta} \, d\theta$$

$$z = \tan\theta \implies dz = \sec^2\theta \, d\theta$$

$$, \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$$

$$\text{at } \theta = 0 \longrightarrow z = 0$$

$$\text{at } \theta = \frac{\pi}{2} \longrightarrow z = \infty$$

$$I = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dz}{a^2(1+z^2) + b^2 z^2}$$

$$= \frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dz}{a^2 + (a^2+b^2) z^2} = \frac{\frac{2a}{\pi}}{a^2+b^2} \int \frac{dz}{z^2 + \left(\frac{a}{a+b}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} * \frac{\frac{2a}{\pi}}{(a^2+b^2)} \tan^{-1} \frac{z(b+a)}{a} \Big|_0^{\infty}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

$$= \frac{2}{\pi\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)}\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$\boxed{16}$ Lec 24